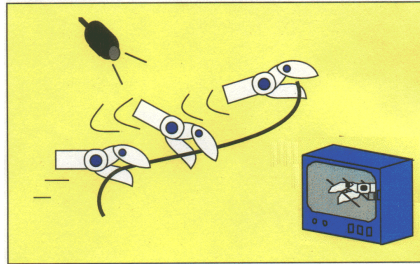


ROBOTIQUE ET AUTOMATISATION INDUSTRIELLES



Jean-Daniel Dessimoz

heig-vd

HAUTE ÉCOLE
D'INGÉNIERIE ET DE GESTION
DU CANTON DE VAUD
www.heig-vd.ch

institut d'
Automatisation
industrielle
Laboratoire de Robotique et Automatisation

LaRA

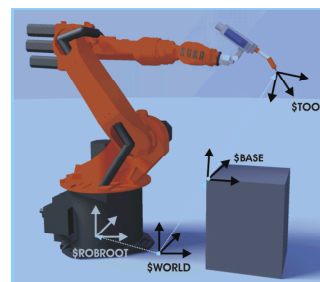
Hes·SO
Haute Ecole Spécialisée
de Suisse occidentale

HESSO-HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 21 octobre 2016

1

Cours de Robotique et Automatisation

1. Concepts généraux
2. Cinématique
3. Commande
4. Chapitres choisis



heig-vd

HAUTE ÉCOLE
D'INGÉNIERIE ET DE GESTION
DU CANTON DE VAUD
www.heig-vd.ch

institut d'
Automatisation
industrielle
Laboratoire de Robotique et Automatisation

LaRA

Jean-Daniel Dessimoz
Hes·SO
Haute Ecole Spécialisée
de Suisse occidentale

HESSO-HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 8 octobre 2015

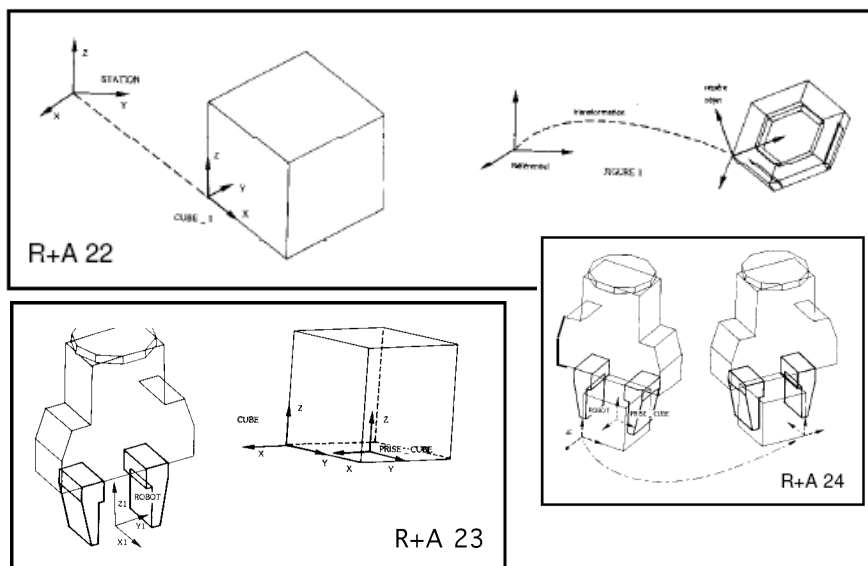
2

CINEMATIQUE D'UN BRAS MANIPULATEUR

1. Introduction
2. Rotation et translation de repères
3. Solution cinématique directe; Méthode de Denavit et Hartenberg
4. Problème cinématique inverse
5. Jacobien
6. Modèle dynamique

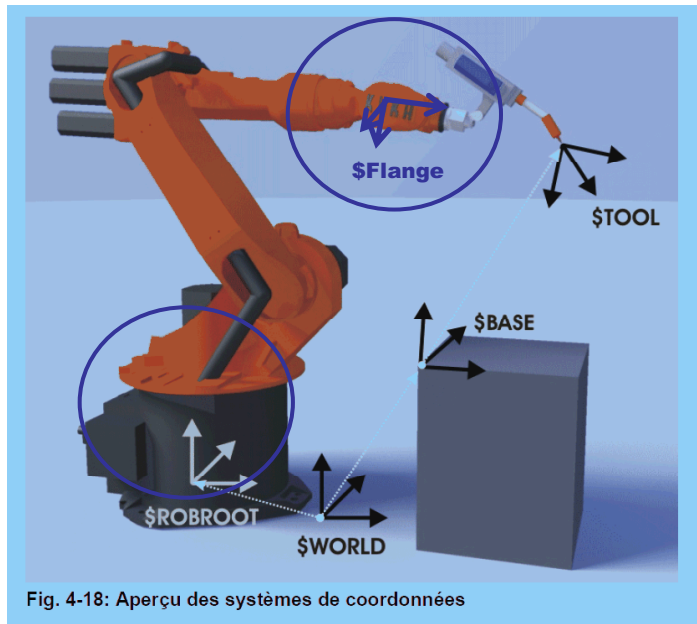
HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

3



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

4



Doc Kuka
et JDZ

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 26 sept. 2011

5

CINEMATIQUE D'UN BRAS MANIPULATEUR

1. Introduction
2. Rotation et translation de repères
3. Solution cinématique directe; Méthode de Denavit et Hartenberg
4. Problème cinématique inverse
5. Jacobien
6. Modèle dynamique

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

6

2. Rotation et translation de repères

2.1. Description par vecteurs et matrices 3D

2.2. Analogie graphique

2.3. Coordonnées angulaires

Angles d'Euler

Angles θ , A , T et r, y, p

Quaternions

2.4. Coordonnées homogènes

Principe

Coordonnées homogènes

Matrices de transformation

Matrice du bras

Inversion de matrice

Exemple: Prise d'un cube perçu visuellement

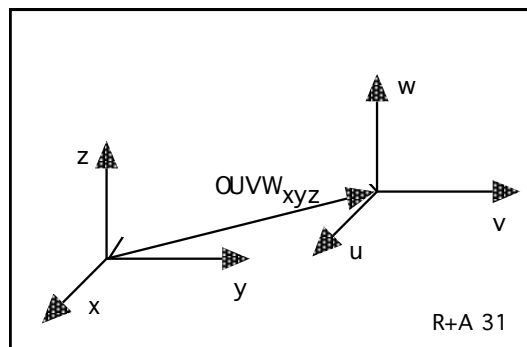
2.5. Changements de coordonnées

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

7

Rotation et translation de repères

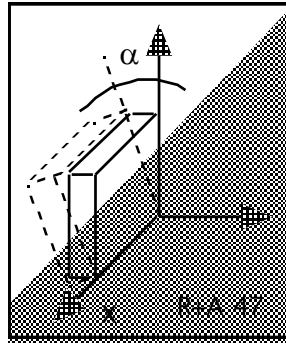
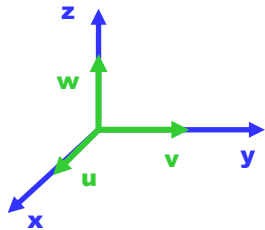
$$\vec{p}_{xyz} = \vec{p}_{uvw} + \vec{O}_{UVW_{xyz}}$$



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

8

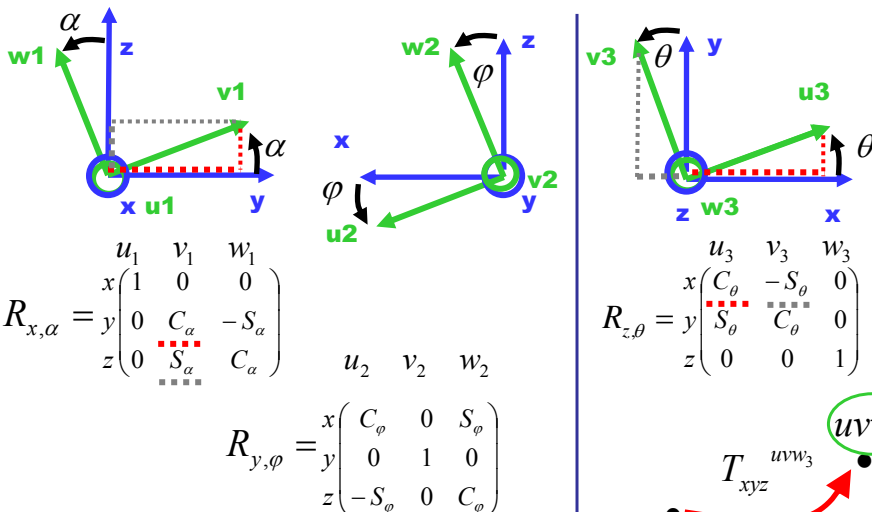
Rotation et translation de repères (1 de 2)



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

9

Rotation et translation de repères (2 de 2)



Rotations simples autour de x,y, et z

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 26 oct. 2012

10

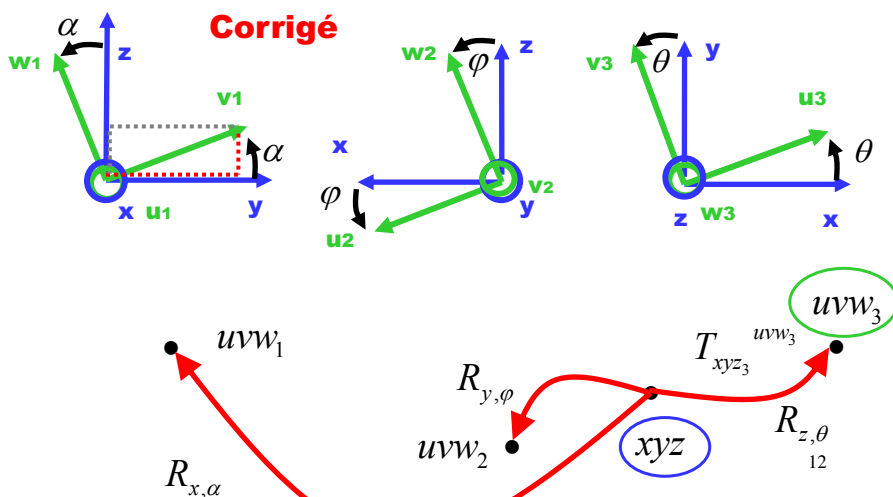
Rotation et translation de repères (2 de 2)

Exercice: faire le graphe des repères et transformations pour le cas de la page précédente (4 repères et rotations selon les axes de base, x,y,z.)

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 26 oct. 2012

11

Rotation et translation de repères (2 de 2)

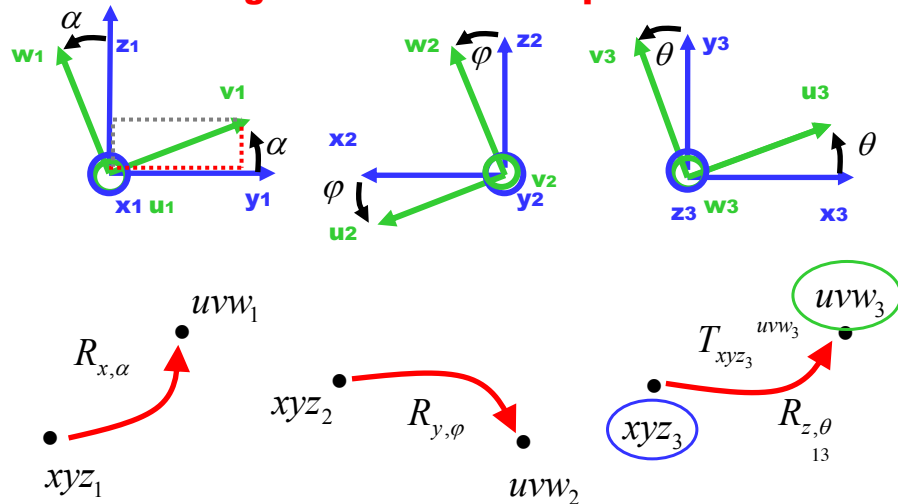


Rotations simples autour de x,y, et z

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

Rotation et translation de repères (2 de 2)

Corrigé – Variante à 6 repères



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

2. Rotation et translation de repères

2.1. Description par vecteurs et matrices 3D

2.2. Analogie graphique

2.3. Coordonnées angulaires

Angles d'Euler

Angles 0, A, T et r,y,p

Quaternions

2.4. Coordonnées homogènes

Principe

Coordonnées homogènes

Matrices de transformation

Matrice du bras

Inversion de matrice

Exemple: Prise d'un cube perçu visuellement

2.5. Changements de coordonnées

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

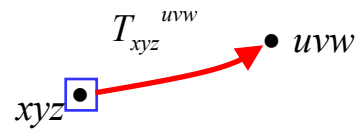
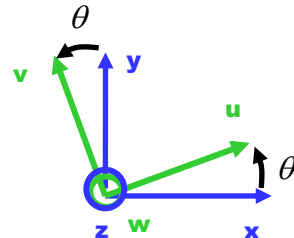
14

2.2. Analogie graphique (1 de 5)

- Repères: points
- Transformation: flèche
- Inverse : ... inverse
- Suite de flèches: produit matriciel

$$T_{xyz}^{uvw} = R_{z,\theta} = \begin{matrix} & U & V & W \\ \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} & \begin{pmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

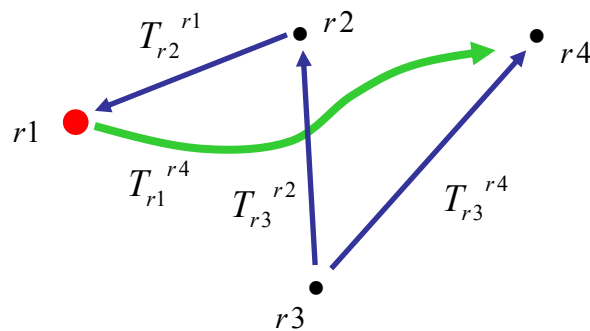
$$T_{xyz}^{uvw} = \begin{matrix} & U & V & W & P \\ \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} & \begin{pmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

15

2.2. Analogie graphique (2 de 5)

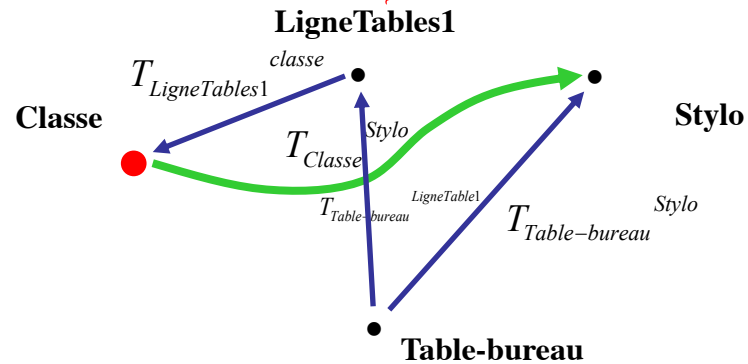


$$T_{r1}^{r4} = (T_{r2}^{r1})^{-1} \cdot (T_{r3}^{r2})^{-1} \cdot T_{r3}^{r4}$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

16

2.2. Analogie graphique (2_b de 3)



$$T_{Classe}^{Stylo} = \left(T_{LigneTable1}^{Classe}\right)^{-1} \cdot \left(T_{Table-bureau}^{LigneTable1}\right)^{-1} \cdot T_{Table-bureau}^{Stylo}$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

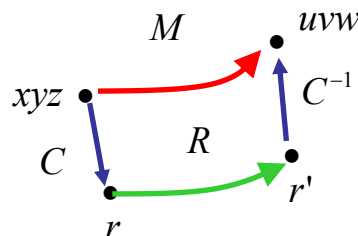
17

2.2. Analogie graphique (3 de 5)

Si une opération est simple dans un repère « r » (c'est-à-dire que l'opération est définie par rapport à l'un des axes x, y ou z de r), il faut:

- y aller avec une transformation , C,
- y faire l'opération simple, R,
- en revenir avec l'inverse de C, C⁻¹

$$M = C \cdot R \cdot C^{-1}$$



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

18

2.2. Analogie graphique (3b de 5)

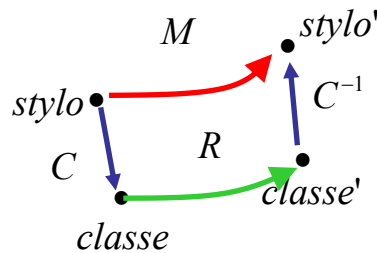
Si une opération est simple dans un repère « r » (c'est-à-dire que l'opération est définie par rapport à l'un des axes x, y ou z de r), il faut:

- y aller avec une transformation, C,
- y faire l'opération simple, R,
- en revenir avec l'inverse de C, C⁻¹

$$M = C \cdot R \cdot C^{-1}$$

Ex.

$$C = \left(T_{classe}^{stylo} \right)^{-1}$$



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

19

2.2. Analogie graphique (4 de 5)

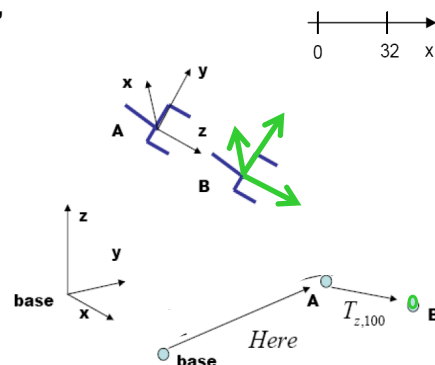
Déplacement dans l'axe de l'outil, z_{tool}, de 100 mm (de la position A à B):

$$T_A^B = T_{z,100}$$

$$T_{z,100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{base}^B = T_{base}^A \cdot T_A^B = Here \cdot T_{z,100}$$

Syntaxe de l'opérateur de combinaison de transformations, càd de produit matriciel:
ici, « · » ; Val, V+, Kuka: « : » ; Val-3 : « * ».

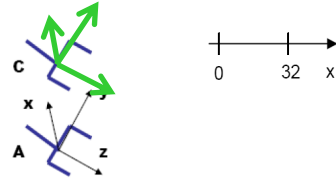


HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 31 oct. 2011

20

2.2. Analogie graphique (4b de 5)

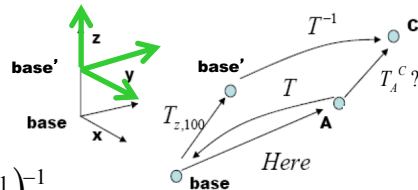
Déplacement en vertical de 100 mm ,
selon z_{base} (de la position A à C): la
transformation n'est pas simple ; il
vaut mieux aller dans le repère de
base faire la translation .



$$M = C \cdot R \cdot C^{-1}$$

$$T_A^C = T \cdot T_{z,100} \cdot T^{-1}$$

$$T_A^C = \text{Here}^{-1} \cdot T_{z,100} \cdot (\text{Here}^{-1})^{-1}$$



Syntaxe de l'opérateur d'inversion de
transformations, c'est d'inversion de matrice:
ici, « ...⁻¹ » ; Val, V+: « inverse(...) » ; Val-3 : « ! ».

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

21

2.2. Analogie graphique (5 de 5)

Déplacement dans l'axe de l'outil,
 z_{tool} , de 100 mm (de la position A à
B):

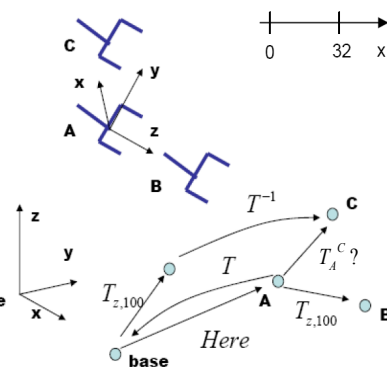
Do Move Here : $\text{Trans}(0,0,100,0,0,0)$;

Déplacement en vertical de 100 mm
selon z_{base} (de la position A à C): la
transformation n'est pas simple ; il
vaut mieux aller dans le repère de
base faire la translation .

Do Move Here : $\text{inverse}(\text{Here})$:

$\text{Trans}(0,0,100,0,0,0)$:

$\text{inverse}(\text{inverse}(\text{Here}))$;



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

22

2.2. Analogie graphique (5b de 5)

$$T_{r1}^{r4} = \left(T_{r2}^{r1}\right)^{-1} \cdot \left(T_{r3}^{r2}\right)^{-1} \cdot T_{r3}^{r4}$$

Fonctions disponibles pour évaluer ce type d'équation matricielle dans des langages de robot:

	<i>Matrice inverse</i>	<i>Produit matriciel</i>
Stäubli/V+:	set tinv=inverse(t)	t3=t1:t2
Stäubli/Val3:	tinv= ! t	t3=t1*t2
ABB/Rapid:	tinv:=PoseInv(t)	t3:=PoseMult(t1, t2)
Piaget:	tinv=MatriceInverse(t)	MultMatrices(t1,t2,t3)

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

23

2.2. Analogie graphique (5c de 5)

Fonctions accessoires éventuellement utiles, en langage pour robot Stäubli/Val3 (cf. notions "parasites" liées aux points, repères, outils...).

Apprentissage d'un point (Teaching): pMonPoint=here(tOutil,world)

Demande de mouvement:

movej(pMonPoint, tflange, mNomSpeed)

Définition d'un point à l'origine de World: pNull=pMonPoint, puis

trNull={0,0,0,0,0,0}, puis pNull.trsf=trNull

Extraction de la partie géométrique ("transformation") d'un "point":

trMaTransformation=position(pMonPoint,fWorld)

Création d'un point à partir d'une transformation

pMonPoint=pNull, puis pMonPoint.trsf=trMaTransformation

Création d'un repère ("frame"):

nErreur=SetFrame(pOrigine, pAxeX, pPlanYX, fPalette)

Mouvement simple, relatif, à interpréter dans un repère quelconque, à définir:

pMonNouveauPoint=compose(pMonPoint, fMonRepereOuSimple, trMaTransformationSimple)

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 21 oct. 2016

24

2. Rotation et translation de repères

2.1. Description par vecteurs et matrices 3D

2.2. Analogie graphique

2.3. Coordonnées angulaires

Roulis, tangage, lacet

Angles d'Euler

Quaternions

2.4. Coordonnées homogènes

Principe

Coordonnées homogènes

Matrices de transformation

Matrice du bras

Inversion de matrice

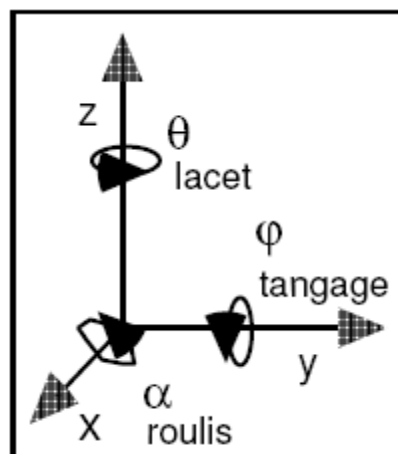
Exemple: Prise d'un cube perçu visuellement

2.5. Changements de coordonnées

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

25

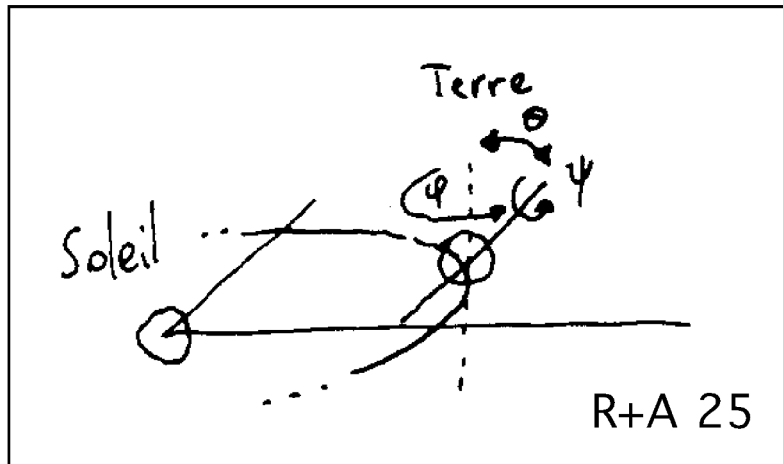
Rotations XYZ – roulis, tangage, lacet



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

26

Angles d'Euler (ZYZ) 1 de 4



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

27

Angles d'Euler (ZYZ) 2 de 4

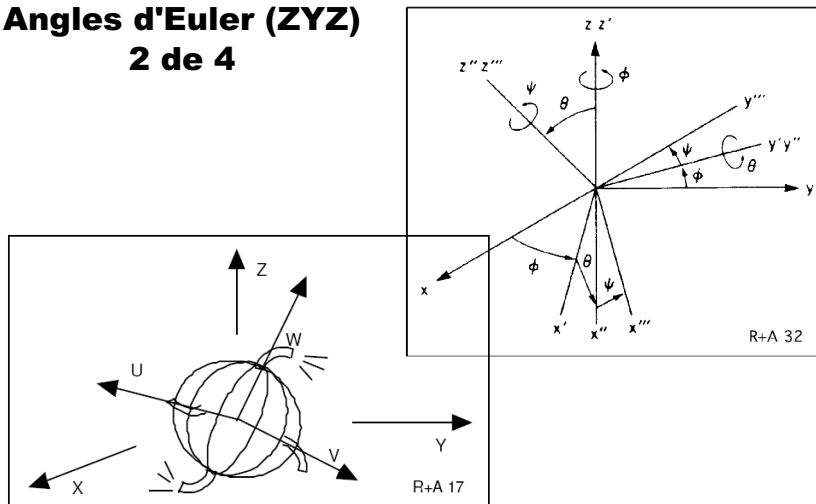


Fig. 2.2.2 Rotations simples dans le repère mobile

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

28

Angles d'Euler (ZYZ) 3 de 4

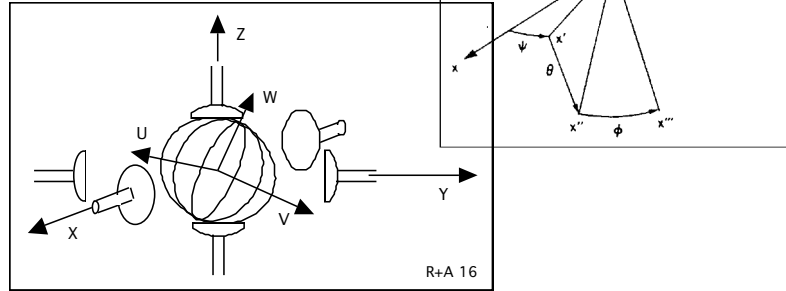


Fig. 2.2.3 Rotations simples dans le repère fixe

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

29

Angles d'Euler (ZYZ) 4 de 4

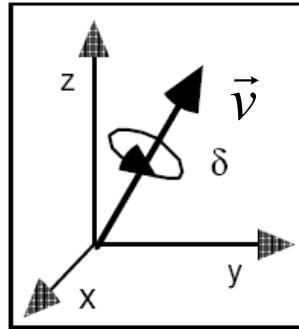
$$R(\varphi, \theta, \psi) = R_{\varphi, z} \bullet R_{\theta, y} \bullet R_{\psi, z}$$

$$R(\varphi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} C_{\varphi} C_{\theta} C_{\psi} - S_{\varphi} S_{\psi} & -C_{\varphi} C_{\theta} S_{\psi} - S_{\varphi} C_{\psi} & C_{\varphi} S_{\theta} & 0 \\ S_{\varphi} C_{\theta} C_{\psi} + C_{\varphi} S_{\psi} & -S_{\varphi} C_{\theta} S_{\psi} + C_{\varphi} C_{\psi} & S_{\varphi} S_{\theta} & 0 \\ -S_{\theta} C_{\psi} & S_{\theta} S_{\psi} & C_{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

30

Quaternions



Principe:

$$\|v_4\| = 1$$

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \sin(\delta/2) \\ y \cdot \sin(\delta/2) \\ z \cdot \sin(\delta/2) \\ \cos(\delta/2) \end{pmatrix}$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

31

2. Rotation et translation de repères

2.1. Description par vecteurs et matrices 3D

2.2. Analogie graphique

2.3. Coordonnées angulaires

Angles d'Euler

Angles 0, A, T et r,y,p

Quaternions

2.4. Coordonnées homogènes

Principe

Matrice de transformation

Matrice du bras

Inversion de matrice

Exemple: Prise d'un cube perçu visuellement

2.5. Changements de coordonnées

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

32

Coordonnées homogènes (1 de 6)
Matrice en 4 parties, yc. pour translation et rotation

Orientation: 3x3			Position: 1x3
rotation "cosinus directeurs"			OUVW _x OUVW _y OUVW _z
w(position)			w
(Effet de perspective: 3x1) Ici: 0 0 0			(Agrandissement: 1x1) Ici: 1

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

33

Coordonnées homogènes (2 de 6)
Matrice type translation ou rotation

$$B_{trans} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{x,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_\alpha & -S_\alpha & 0 \\ 0 & S_\alpha & C_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

34

Matrice du bras

$$T_0^n = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{n} & \text{g} & \text{a} & \text{Otool} \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} n_x & g_x & a_x & p_x \\ n_y & g_y & a_y & p_y \\ n_z & g_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

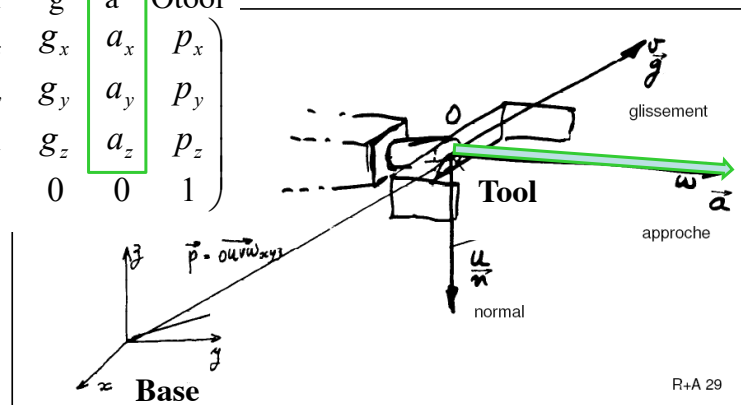


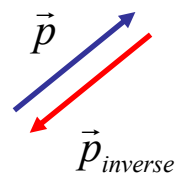
Fig. 2.4.1 Pour le repère du préhenseur, on associe aux noms habituels x , y et z (ou u , v et w), les vecteurs unitaires n (normal), g (glissement) et surtout a (approche).

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

35

Inversion de matrice

$$M = T_{r_l}^{r_2} = \begin{pmatrix} \vec{n} & \vec{g} & \vec{a} & \vec{p} \\ n_x & g_x & a_x & p_x \\ n_y & g_y & a_y & p_y \\ n_z & g_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$M^{-1} = T_{r2}^{r1} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -\vec{n} \cdot \vec{p} \\ g_x & g_y & g_z & -\vec{g} \cdot \vec{p} \\ a_x & a_y & a_z & -\vec{a} \cdot \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv n_x \cdot p_x + n_y \cdot p_y + n_z \cdot p_z$$

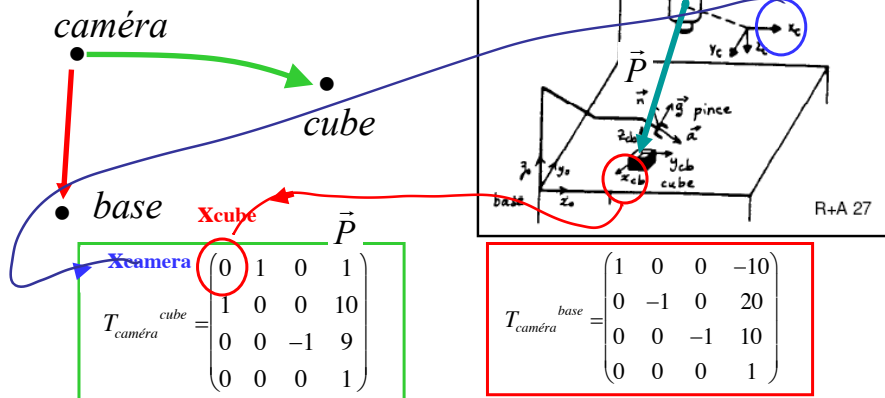
HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

36

Coordonnées homogènes (5 de 6)

Exemple

Problème: $T_{base}^{cube} = ?$



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

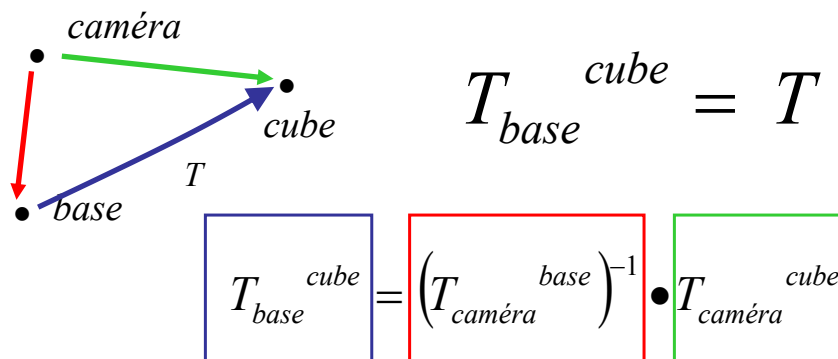
37

Coordonnées homogènes (6 de 6)

Exemple

Problème: $T_{base}^{cube} = ?$

Solution:



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

38

2. Rotation et translation de repères

2.1. Description par vecteurs et matrices 3D

2.2. Analogie graphique

2.3. Coordonnées angulaires

Angles d'Euler

Angles θ , A , T et r, y, p

Quaternions

2.4. Coordonnées homogènes

Principe

Coordonnées homogènes

Matrices de transformation

Matrice du bras

Inversion de matrice

Exemple: Prise d'un cube perçu visuellement

2.5. Changements de coordonnées

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

39

2.5. Changements de coordonnées (1 de 3)

Solutions standards:

**Translations, X, Y, Z $\leftrightarrow$ vecteur 1×3 ou
matrice de transformation 4×4**

Angles d'Euler $\leftrightarrow$ Matrice(s) de rotation 3×3 ou 4×4

Quaternions $\leftrightarrow$ Matrice(s) de rotation 3×3 ou 4×4

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

40

2.5. Changements de coordonnées (2 de 3) Exemples

Angles d'Euler à matrice 3x3:

$$R(\varphi, \theta, \psi) = R_{\varphi, z} \bullet R_{\theta, y} \bullet R_{\psi, z}$$

Matrice 4x4: à angles d'Euler:

$$T_0^n = \begin{pmatrix} n_x & g_x & a_x & p_x \\ n_y & g_y & a_y & p_y \\ n_z & g_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \arctg_4 (a_y / a_x)$$

$$\theta = \arctg_4 ((a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi) / a_z)$$

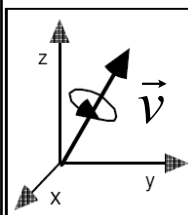
$$\psi = \arctg_4 ((-n_x \sin \varphi + n_y \cos \varphi) / (-g_x \sin \varphi + g_y \cos \varphi))$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

41

2.5. Changements de coordonnées (3 de 3) Exemples

Conversion de quaternions (principe)



$$\vec{v}, \delta \rightarrow \vec{q}$$

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \cdot \sin(\delta/2) \\ v_y \cdot \sin(\delta/2) \\ v_z \cdot \sin(\delta/2) \\ \cos(\delta/2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{q} \rightarrow \vec{v}, \delta$$

$$\sin(\delta/2)^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad \cos(\delta/2) = q_4$$

$$\delta = 2 \cdot \arctg \left(\frac{\sin \delta / 2}{\cos \delta / 2} \right)$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 / \sin(\delta/2) \\ q_2 / \sin(\delta/2) \\ q_3 / \sin(\delta/2) \end{pmatrix}$$

Le code de conversion, et les fonctions, angles d'Euler <-> quaternions, pour les robots ABB, sont disponibles dans la documentation de la manipulation 28 - ABB, au laboratoire et sur notre serveur.

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 10 oct. 2014

42

CINEMATIQUE D'UN BRAS MANIPULATEUR

- 1. Introduction**
- 2. Rotation et translation de repères**
- 3. Solution cinématique directe; Méthode de Denavit et Hartenberg**
- 4. Problème cinématique inverse**
- 5. Jacobien**
- 6. Modèle dynamique**

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

43

3. Solution cinématique directe; Méthode de Denavit et Hartenberg

- 3.1. Introduction**
- 3.2. Marche à suivre pour obtenir la "matrice du bras" d'un robot**
- 3.3. Définition des référentiels**
- 3.4. Paramètres et matrice d'articulation**
- 3.5. Matrice du bras**
- 3.6. Exemple: Cas du Puma 560**

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

44

Intro D-H

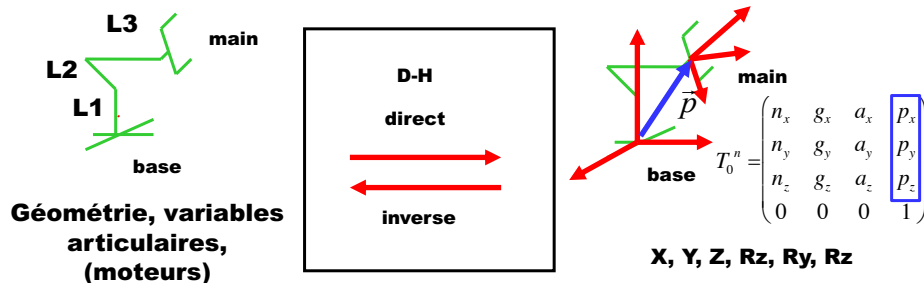
- **Contexte:** exprimer la position de l'extrémité mobile d'un bras (en général, le préhenseur) par rapport à son extrémité fixe (la base du robot)
- **Données requises:** paramètres géométriques des éléments du bras (longueur éléments, angles de rotation des articulations...).
- **Solution cinématique directe:** permet de passer des paramètres géométriques du bras (en particulier, des variables articulaires) à des coordonnées spatiales génériques (typiquement: x, y, z, θ, ϕ , et ψ).
- **Indifféremment:** coordonnées spatiales, ou matrice de transformation correspondante (matrice du bras).
- **Méthode D-H:** un peu fastidieuse de par le nombre d'opérations qu'elle requiert. Mais donne toujours une solution, si un bras où une chaîne cinématique sans boucle (en particulier: pas de parallélogrammes).

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

45

Intro D-H

- **Quel est l'état (position et orientation=pose) du robot?**
- **2 vues:**
 - **Caractéristiques propres (artic., géom.; à gauche ci-dessous);**
 - **Repères et transformation (à droite ci-dessous).**
- **La méthode de Denavit-Hartenberg est extrêmement importante, tant pour les systèmes réels qu'en virtuel, pour obtenir la solution cinématique directe dans le cas d'architecture séquentielle (non parallèle).**



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 3 nov. 2010

46

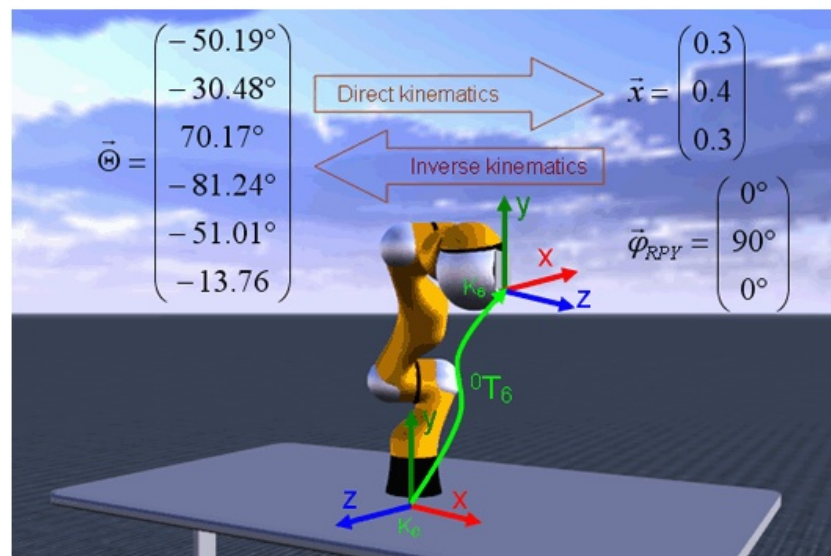


Fig.1: Direct vs. inverse kinematic transformation

Doc. Kuka

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 26 sept. 2011

47

3. Solution cinématique directe; Méthode de Denavit et Hartenberg

3.1. Introduction

3.2. Marche à suivre pour obtenir la "matrice du bras" d'un robot

3.3. Définition des référentiels

3.4. Paramètres et matrice d'articulation

3.5. Matrice du bras

3.6. Exemple: Cas du Puma 560

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

48

3.2. Marche à suivre pour obtenir la "matrice du bras" d'un robot

- A. Identifier les axes d'articulations prismatiques et de révolution, ainsi que la direction de mouvement du préhenseur
- B. Définir les référentiels $O_0 X_0 Y_0 Z_0$, $O_1 X_1 Y_1 Z_1$, $O_2 X_2 Y_2 Z_2$, ... , successivement, en partant de la base
- C. Évaluer les paramètres θ , d , a , α pour chacun des éléments du bras
- D. Multiplier les matrices A_0^1 , A_1^2 , A_2^3 ... telles que résultant des paramètres évalués en C. Éventuellement, une transformation constante peut encore être postmultipliée, afin de mieux décrire le préhenseur utilisé ("transformation d'outil").

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

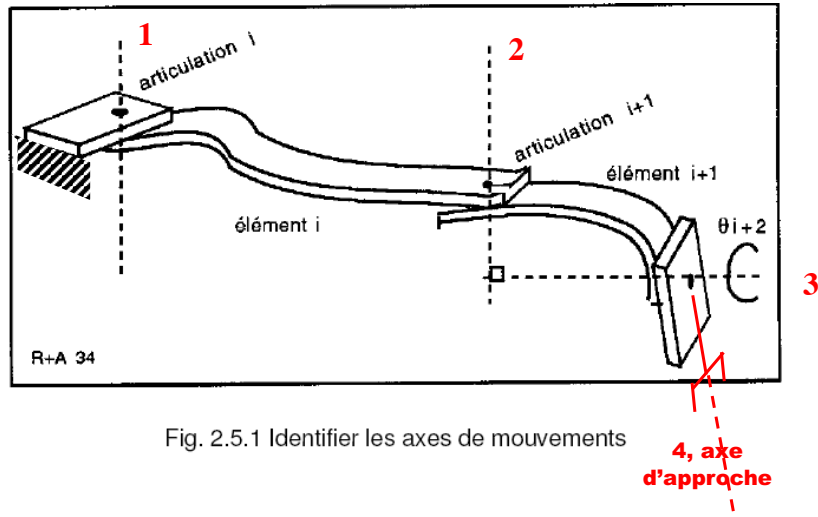
49

3.2. Marche à suivre pour obtenir la "matrice du bras" d'un robot

- A. Identifier les axes d'articulations prismatiques et de révolution, ainsi que la direction de mouvement du préhenseur
- B. Définir les référentiels $O_0 X_0 Y_0 Z_0$, $O_1 X_1 Y_1 Z_1$, $O_2 X_2 Y_2 Z_2$, ... , successivement, en partant de la base
- C. Évaluer les paramètres θ , d , a , α pour chacun des éléments du bras
- D. Multiplier les matrices A_0^1 , A_1^2 , A_2^3 ... telles que résultant des paramètres évalués en C. Éventuellement, une transformation constante peut encore être postmultipliée, afin de mieux décrire le préhenseur utilisé ("transformation d'outil").

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

50



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

51

3. Solution cinématique directe; Méthode de Denavit et Hartenberg

3.1. Introduction

3.2. Marche à suivre pour obtenir la "matrice du bras" d'un robot

3.3. Définition des référentiels

3.4. Paramètres et matrice d'articulation

3.5. Matrice du bras

3.6. Exemple: Cas du Puma 560

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

52

3.2. Marche à suivre pour obtenir la "matrice du bras" d'un robot

- A. Identifier les axes d'articulations prismatiques et de révolution, ainsi que la direction de mouvement du préhenseur
- B. Définir les référentiels $O_0 X_0 Y_0 Z_0$, $O_1 X_1 Y_1 Z_1$, $O_2 X_2 Y_2 Z_2$, ..., successivement, en partant de la base
- C. Évaluer les paramètres θ , d , a , α pour chacun des éléments du bras
- D. Multiplier les matrices A_0^1 , A_1^2 , A_2^3 ... telles que résultant des paramètres évalués en C. Éventuellement, une transformation constante peut encore être postmultipliée, afin de mieux décrire le préhenseur utilisé ("transformation d'outil").

3.3. Définition des référentiels

Les axes x_i , y_i , et z_i sont définis de la façon suivante:

- Z: L'axe z_{i-1} se trouve dans l'axe de mouvement de l'articulation i , sauf le dernier, qui se trouve dans l'axe d'approche du préhenseur.
- X: L'axe x_i se trouve sur une normale commune à z_i et à z_{i-1} pointant loin de ce dernier.
- Y: L'axe y_i complète le système de coordonnées droit (produit vectoriel de z_i par x_i).

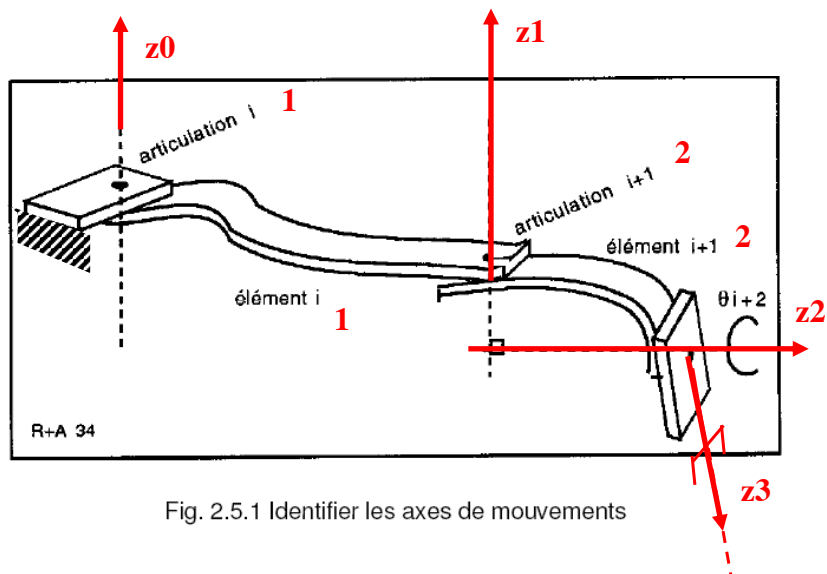


Fig. 2.5.1 Identifier les axes de mouvements

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

55

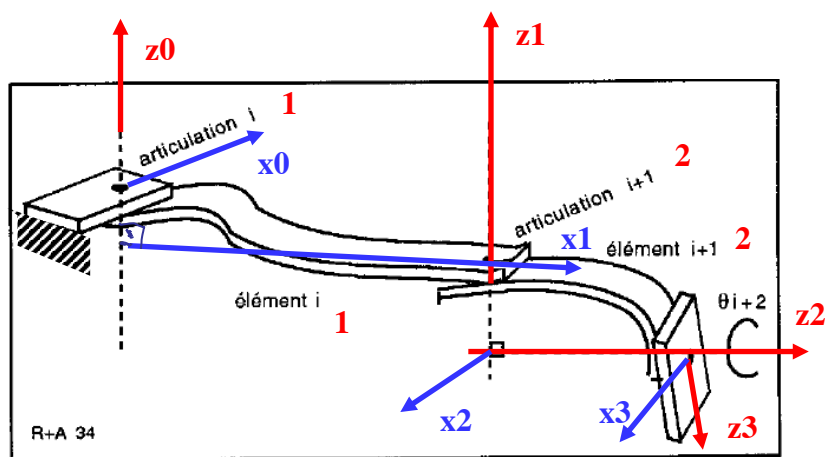


Fig. 2.5.1 Identifier les axes de mouvements

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

56

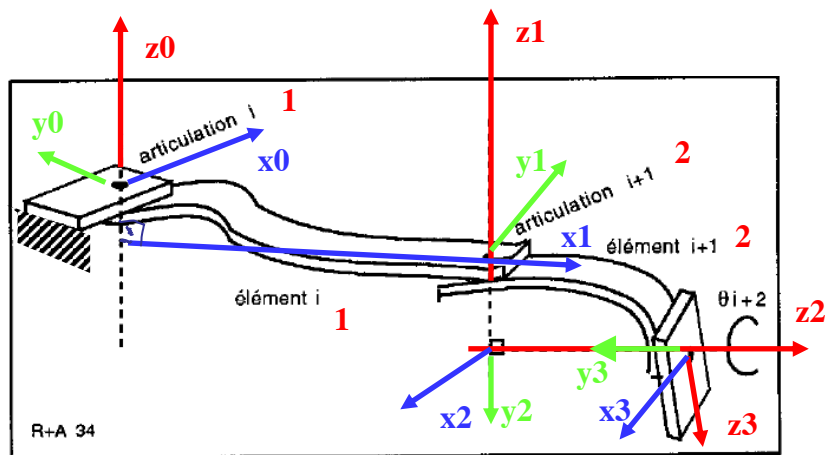


Fig. 2.5.1 Identifier les axes de mouvements

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

57

3. Solution cinématique directe; Méthode de Denavit et Hartenberg

3.1. Introduction

3.2. Marche à suivre pour obtenir la "matrice du bras" d'un robot

3.3. Définition des référentiels

3.4. Paramètres et matrice d'articulation

3.5. Matrice du bras

3.6. Exemple: Cas du Puma 560

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

58

3.2. Marche à suivre pour obtenir la "matrice du bras" d'un robot

- A. Identifier les axes d'articulations prismatiques et de révolution, ainsi que la direction de mouvement du préhenseur
- B. Définir les référentiels $O_0 X_0 Y_0 Z_0$, $O_1 X_1 Y_1 Z_1$, $O_2 X_2 Y_2 Z_2$, ... , successivement, en partant de la base
- C. Évaluer les paramètres θ , d , a , α pour chacun des éléments du bras
- D. Multiplier les matrices A_0^1 , A_1^2 , A_2^3 ... telles que résultant des paramètres évalués en C. Éventuellement, une transformation constante peut encore être postmultipliée, afin de mieux décrire le préhenseur utilisé ("transformation d'outil").

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

59

3.4. Paramètres et matrice d'articulation

Les paramètres et variables d'articulation peuvent se définir par rapport aux référentiels:

- θ_i = l'angle amenant x_{i-1} sur x_i en tournant autour de z_{i-1} , dans le sens trigonométrique
- d_i = la distance amenant l'origine de $OXYZ_{i-1}$ sur $OXYZ_i$, mesurée sur l'axe z_{i-1}
- a_i = la distance entre $OXYZ_{i-1}$ et $OXYZ_i$, mesurée sur l'axe x_i
- α_i = l'angle amenant z_{i-1} sur z_i , en tournant autour de x_i , dans le sens trigonométrique

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

60

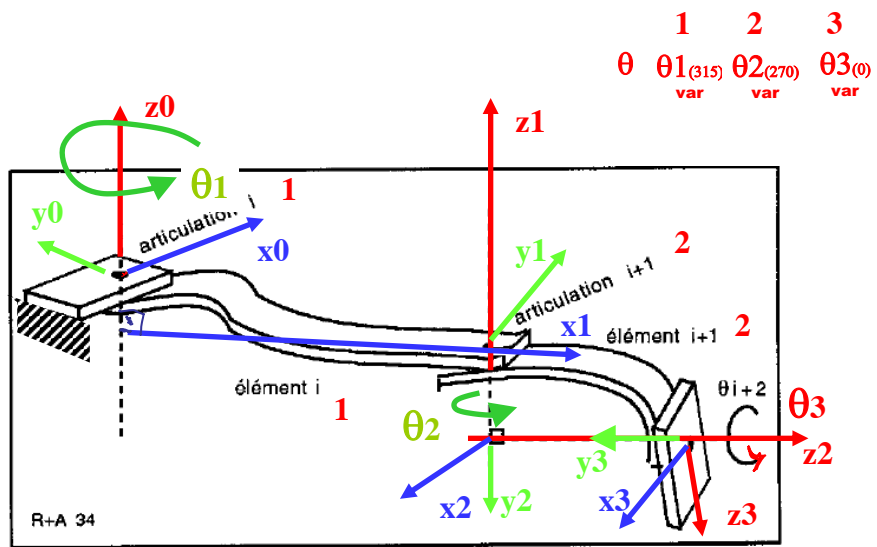


Fig. 2.5.1 Identifier les axes de mouvements

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

61

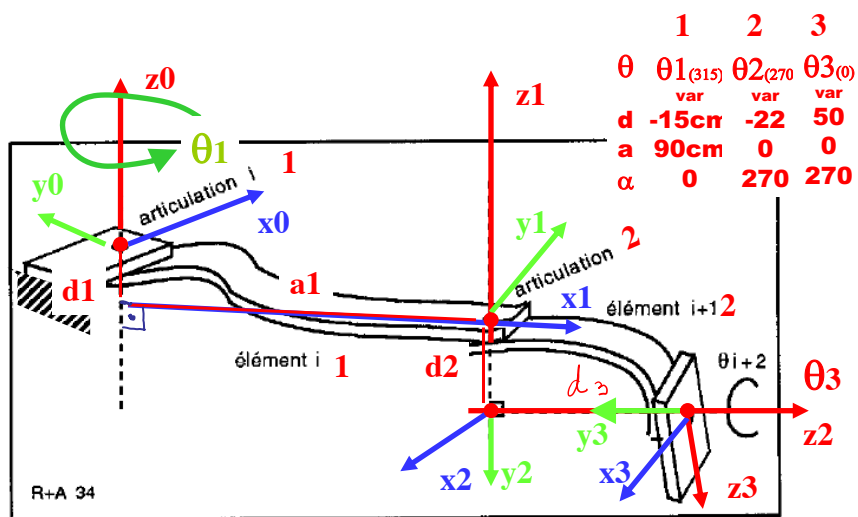


Fig. 2.5.1 Identifier les axes de mouvements

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

62

$$A_{i-1}^i = T_{Z,d_i} \cdot T_{Z,\theta_i} \cdot T_{X,a_i} \cdot T_{X,\alpha_i}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{i-1}^i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i \cdot S\theta_i & S\alpha_i \cdot S\theta_i & a_i \cdot C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i \cdot C\theta_i & -S\alpha_i \cdot C\theta_i & a_i \cdot S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

63

$$A_{i-1}^i = T_{Z,d_i} \cdot T_{Z,\theta_i} \cdot T_{X,a_i} \cdot T_{X,\alpha_i}$$

$$A_0^1 = \begin{pmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 90 \cdot C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 90 \cdot S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 2 3
 θ $\theta_{1(315)}$ $\theta_{2(270)}$ $\theta_{3(0)}$
var var var
d -15cm -22 50
a 90cm 0 0
 α 0 270 270

$$A_{i-1}^i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i \cdot S\theta_i & S\alpha_i \cdot S\theta_i & a_i \cdot C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i \cdot C\theta_i & -S\alpha_i \cdot C\theta_i & a_i \cdot S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

64

3. Solution cinématique directe; Méthode de Denavit et Hartenberg

3.1. Introduction

3.2. Marche à suivre pour obtenir la "matrice du bras" d'un robot

3.3. Définition des référentiels

3.4. Paramètres et matrice d'articulation

3.5. Matrice du bras

3.6. Exemple: Cas du Puma 560

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

65

3.2. Marche à suivre pour obtenir la "matrice du bras" d'un robot

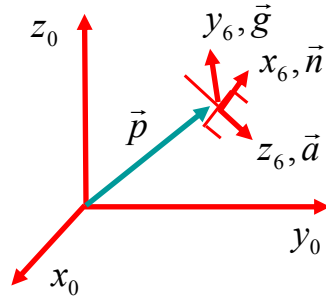
- A. Identifier les axes d'articulations prismatiques et de révolution, ainsi que la direction de mouvement du préhenseur
- B. Définir les référentiels $O_0 X_0 Y_0 Z_0$, $O_1 X_1 Y_1 Z_1$, $O_2 X_2 Y_2 Z_2$, ..., successivement, en partant de la base
- C. Évaluer les paramètres θ , d , a , α pour chacun des éléments du bras
- D. Multiplier les matrices A_0^1 , A_1^2 , A_2^3 ... telles que résultant des paramètres évalués en C. Éventuellement, une transformation constante peut encore être postmultipliée, afin de mieux décrire le préhenseur utilisé ("transformation d'outil").

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

66

$$T_0^n = A_0^1 * A_1^2 * \dots * A_{n-2}^{n-1} * A_{n-1}^n$$

$$T_0^n = \begin{pmatrix} x_6 & y_6 & z_6 & \vec{p} \\ x_0 \begin{pmatrix} n_x & g_x & a_x & p_x \\ y_0 \begin{pmatrix} n_y & g_y & a_y & p_y \\ z_0 \begin{pmatrix} n_z & g_z & a_z & p_z \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$



$$T_0^6 = (\vec{n} \quad \vec{g} \quad \vec{a} \quad \vec{p})$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

67

3. Solution cinématique directe; Méthode de Denavit et Hartenberg

3.1. Introduction

3.2. Marche à suivre pour obtenir la "matrice du bras" d'un robot

3.3. Définition des référentiels

3.4. Paramètres et matrice d'articulation

3.5. Matrice du bras

3.6. Exemple: Cas du Puma 560

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

68

3.6. Exemple: Cas du Puma 560

Var!

JOINT i	θ_i	α_i	a_i	d_i	RANGE
1	90	-90	0	0	-160 to +160
2	0	0	432 mm	149.5 mm	-225 to +45
3	90	90	0	0	-45 to +225
4	0	-90	0	432.0	-110 to +170
5	0	90	0	0	-100 to +100
6	0	0	0	56.5	-266 to +266

R+A 37

69

$$T_0^6 = (\vec{n} \quad \vec{g} \quad \vec{a} \quad \vec{p})$$

$$A_{i-1}^i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{R+A 39}$$

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2^1 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

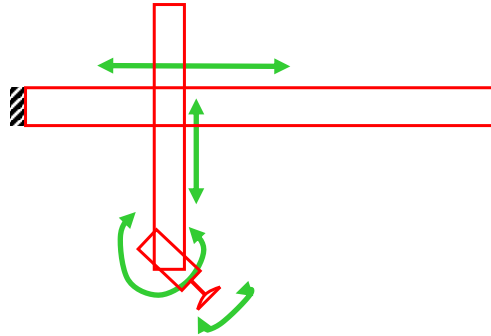
$$A_3^2 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_4^3 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5^4 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_6^5 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{23} = \cos(\theta_2 + \theta_3)$$

$$\begin{aligned} n_x &= C_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] - S_1[S_4C_5C_6 + C_4S_6] \\ n_y &= S_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] + C_1[S_4C_5C_6 + C_4S_6] \\ n_z &= -S_{23}[C_4C_5C_6 - S_4S_6] - C_{23}S_5C_6 \\ g_x &= C_1[-C_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] - S_1[-S_4C_5S_6 + C_4C_6] \\ g_y &= S_1[-C_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] + C_1[-S_4C_5S_6 + C_4C_6] \\ g_z &= S_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + C_{23}S_5S_6 \\ a_x &= C_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) - S_1S_4S_5 \\ a_y &= S_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + C_1S_4S_5 \\ a_z &= -S_{23}C_4S_5 + C_{23}C_5 \\ p_x &= C_1(d_6[C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5] + S_{23}d_4 + a_2C_2) - S_1(d_6S_4S_5 + d_2) \\ p_y &= S_1(d_6[C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5] + S_{23}d_4 + a_2C_2) + C_1(d_6S_4S_5 + d_2) \\ p_z &= d_6(C_{23}C_5 - S_{23}C_4S_5) + C_{23}d_4 - a_2S_2 \end{aligned} \quad \text{R+A 40}$$

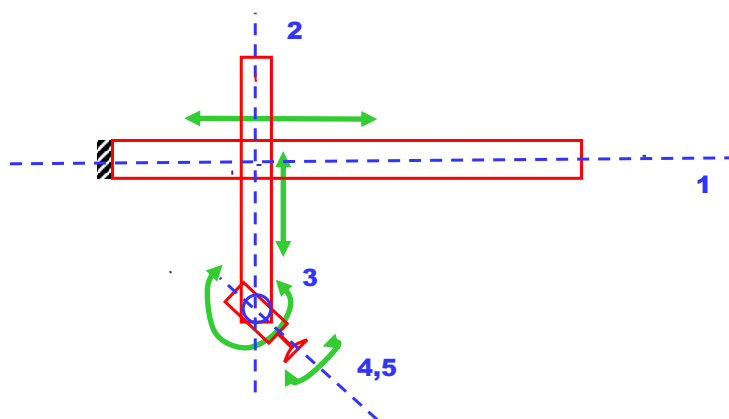
Exemple 1 de 4



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

71

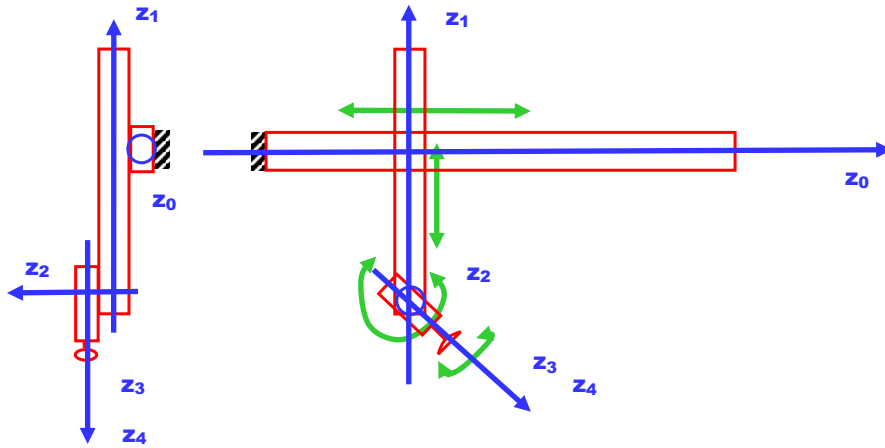
Exemple 2 de 4



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

72

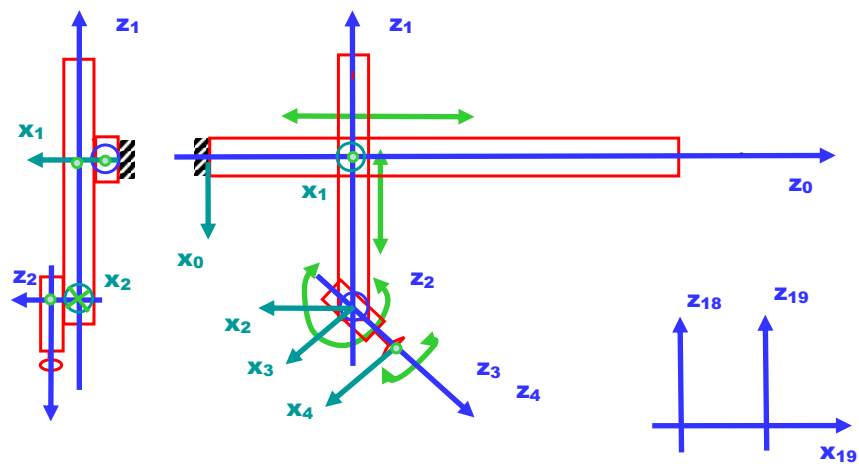
Exemple 3 de 4



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

73

Exemple 4 de 4

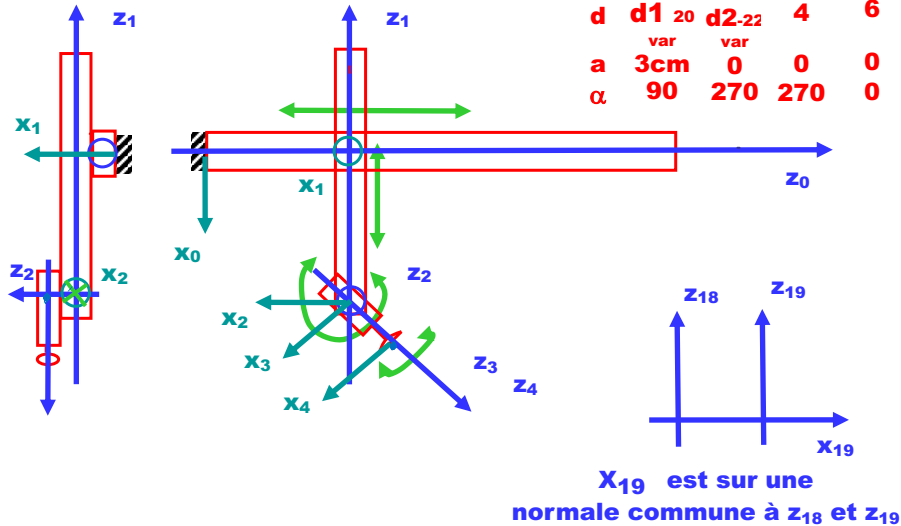


x_{19} est sur une
normale commune à z_{18} et z_{19}

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

74

Exemple 4 de 4



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

75

Cas des robots mobiles et méthode d'Amiguet

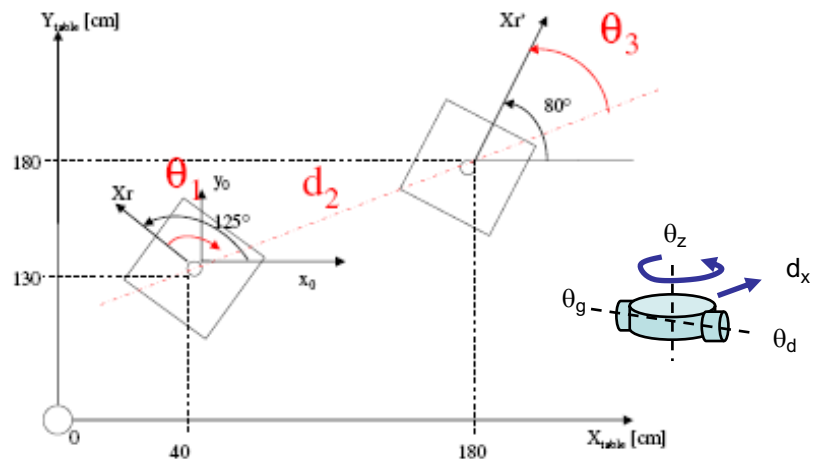
- Principe de la méthode d'Amiguet
- Passage des coordonnées roues aux coordonnées intermédiaires linéaire ou rotatives
 - Déplacement linéaire
 - Déplacement rotatif, sur place
- Passage des coordonnées intermédiaires aux coordonnées spatiales

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

76

Cas des robots mobiles

- Principe de la méthode d'Amiguet



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

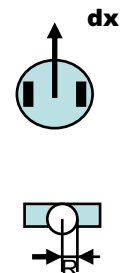
77

Cas des robots mobiles

- Passage des coordonnées roues aux coordonnées intermédiaires linéaire ou rotatives
- Déplacement linéaire

$$dx = R \cdot \theta_d$$

$$T_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & R\theta_d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

78

Cas des robots mobiles

- Passage des coordonnées roues aux coordonnées intermédiaires linéaire ou rotatives
- déplacement rotatif, sur place



Longueur d'arcs
parcourus identique pour
roues et robot:

$$R \cdot \theta_d = \frac{E}{2} \theta_z$$

$$\theta_z = \frac{2 \cdot R \cdot \theta_d}{E}$$

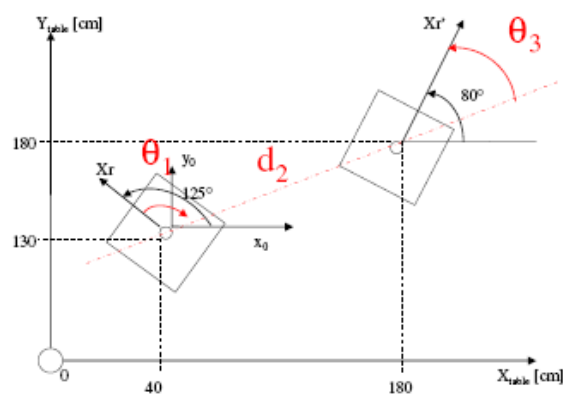
$$T_{12} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2 \cdot R \cdot \theta_d}{E}\right) & -\sin\left(\frac{2 \cdot R \cdot \theta_d}{E}\right) & 0 & 0 \\ \sin\left(\frac{2 \cdot R \cdot \theta_d}{E}\right) & \cos\left(\frac{2 \cdot R \cdot \theta_d}{E}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

79

Cas des robots mobiles

- Passage des coordonnées intermédiaires aux coordonnées spatiales

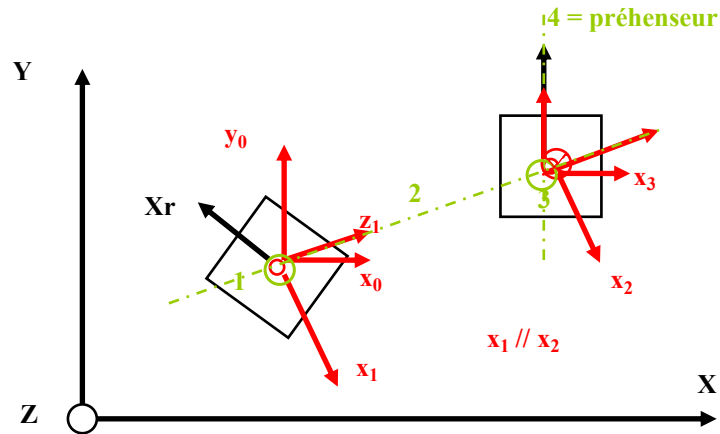


HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

80

Cas des robots mobiles

- Passage des coordonnées intermédiaires aux coordonnées spatiales

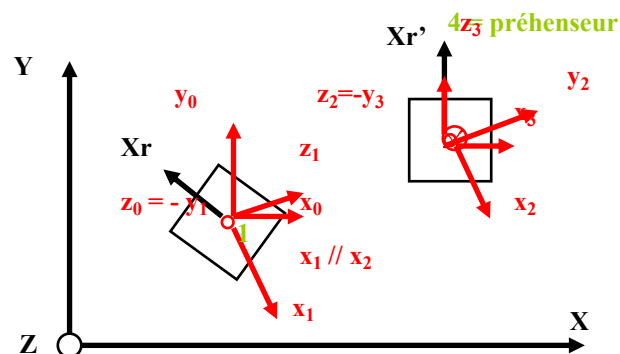


HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

81

Cas des robots mobiles

- Passage des coordonnées intermédiaires aux coordonnées spatiales



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

82

Cas des robots mobiles

- **Passage des coordonnées intermédiaires aux coordonnées spatiales**

	1	2	3
θ	$\theta_1 \cong 280^\circ$ (variable)	0	$\theta_3 \cong 80^\circ$ (variable)
d	0	$d_2 \cong 7 [cm]$ (variable)	0
a	0	0	0
α	270°	90°	270°

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

83

Cas des robots mobiles

- **Passage des coordonnées intermédiaires aux coordonnées spatiales**

$$A_0^1 = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2^3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & 0 & -S\theta_3 & 0 \\ S\theta_3 & 0 & C\theta_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_0^n = A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot A_2^3$$

$$A_{i-1}^i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i \cdot S\theta_i & S\alpha_i \cdot S\theta_i & a_i \cdot C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i \cdot C\theta_i & -S\alpha_i \cdot C\theta_i & a_i \cdot S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

84

CINEMATIQUE D'UN BRAS MANIPULATEUR

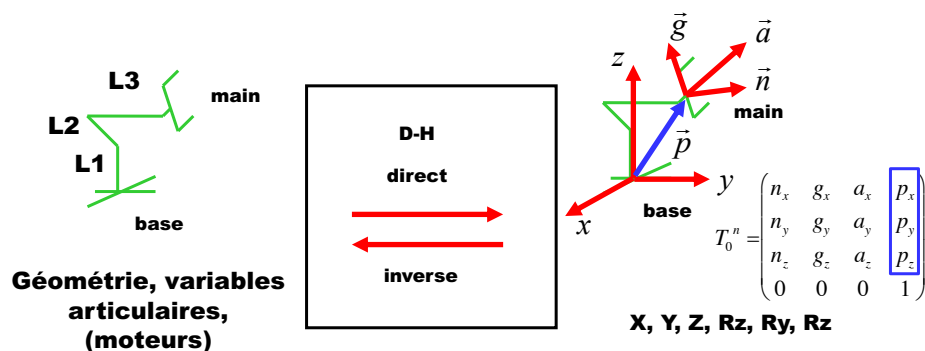
1. Introduction
2. Rotation et translation de repères
3. Solution cinématique directe; Méthode de Denavit et Hartenberg
4. Problème cinématique inverse
5. Jacobien
6. Modèle dynamique

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

85

Problème cinématique inverse

- Quel est l'état (position et orientation=pose) du robot?
- 2 vues:
 - Caractéristiques propres (variables articulaires, paramètres géométriques; à gauche ci-dessous);
 - Repères et transformation (à droite ci-dessous).



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 3 nov. 2010

86

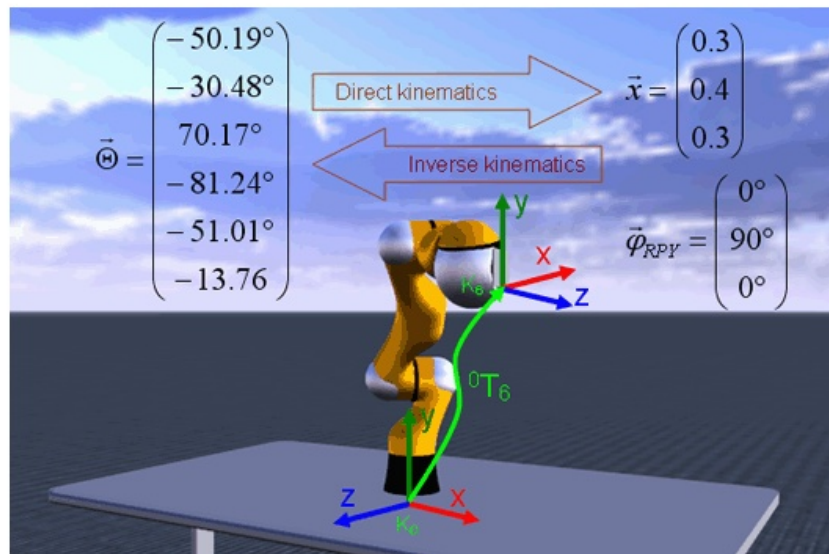


Fig.1: Direct vs. inverse kinematic transformation

Doc. Kuka

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 26 sept. 2011

87

4. Problème cinématique inverse

4.1. Introduction

Solution analytique

Solution géométrique (approche intuitive)

4.2. Solution cinématique inverse pour les trois premiers d.d.l.; positionnement du poignet

Robot cylindrique

Robot cartésien

Robot sphérique

Robot articulé

Remarques

4.3. Solution inverse pour les derniers d.d.l. ; orientation du préhenseur

4.4. Solution inverse pour les angles d'Euler

4.5. Exemple: Solution inverse pour PUMA 560

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

88

4.1.1. Solution analytique

- Équations transcendantes
- Solutions multiples possibles
- Dégénérescence possible (par exemple axes alignés), d'où
- Absence de solution ou solutions en nombre infini.

4.1.2. Solution géométrique (approche intuitive)

- A. Solution relative au positionnement, c'est-à-dire aux trois premières articulations. On utilise alors comme point auxiliaire le centre du poignet .
- B. Solution relative à l'orientation. De manière analogue au cas précédent, les dernières articulations sont exprimées en fonction des termes de la matrice du bras.

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

89

Remarques

Préférer l'arc tangente, sur 4 quadrants, (à l'arc sin ou à l'arc cos).

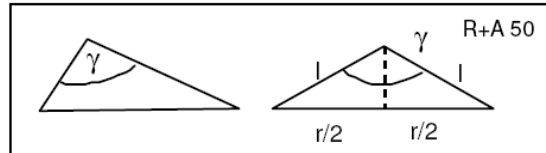
$\text{Arc tg}_4 (-0.7/-0.7) = 225^\circ$

Utiliser le théorème du cosinus (dans les triangles)

(Préférer la compatibilité avec des paramètres D-H)

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 10 févr. 2014

90



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cos \gamma$$

$$\gamma = 2 \arcsin (r / 2 l)$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

91

4. Problème cinématique inverse

4.1. Introduction

Solution analytique

Solution géométrique (approche intuitive)

4.2. Solution cinématique inverse pour les trois premiers d.d.l.; positionnement du poignet

Robot cylindrique

Robot cartésien

Robot sphérique

Robot articulé

Remarques

4.3. Solution inverse pour les derniers d.d.l. ; orientation du préhenseur

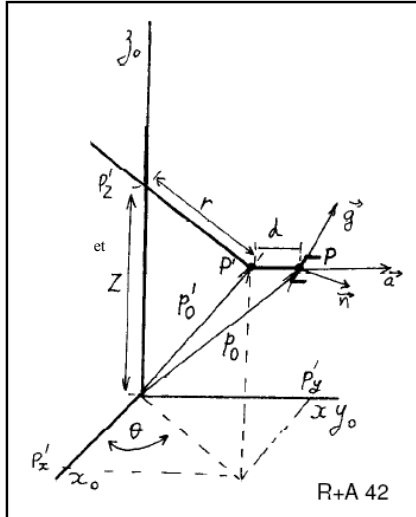
4.4. Solution inverse pour les angles d'Euler

4.5. Exemple: Solution inverse pour PUMA 560

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

92

4.2. Solution cinématique inverse pour les trois premiers d.d.l.;
positionnement du poignet



$$T_0^n = (\vec{n} \quad \vec{g} \quad \vec{a} \quad \vec{p})$$

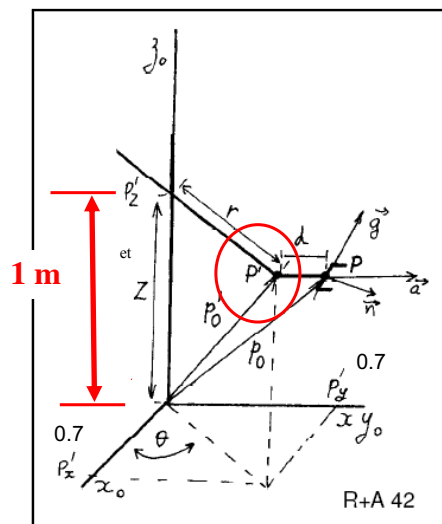
et

$$\vec{p}' = \vec{p} - d \cdot \vec{a}$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

93

4.2. Solution cinématique inverse pour les trois premiers d.d.l.;
positionnement du poignet



$$T_0^n = (\vec{n} \quad \vec{g} \quad \vec{a} \quad \vec{p})$$

et

$$\vec{p}' = \vec{p} - d \cdot \vec{a}$$

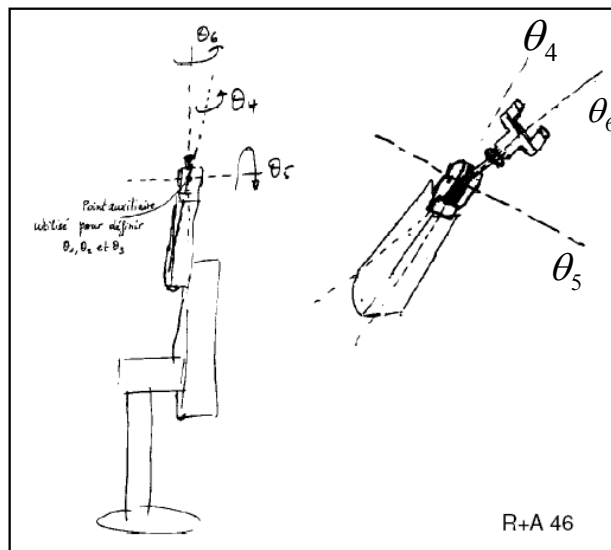
$$\vartheta = \text{Arctg}_4 \left(\frac{p'_y}{p'_x} \right)$$

$$z = p'_z$$

$$r = \sqrt{p_x'^2 + p_y'^2}$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

94



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

95

4.2.1. Robot cylindrique

$$\vartheta = \text{Arctg}_4 \left(\frac{p'_y}{p'_x} \right)$$

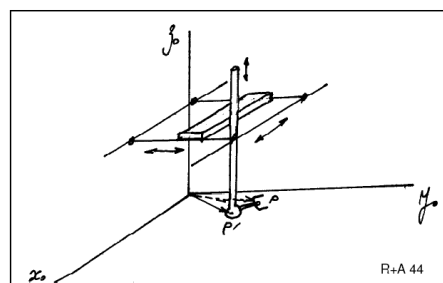
La fonction Arc tg_4 est discutée plus loin, au § *Remarques*.

$$r = \sqrt{p_x'^2 + p_y'^2}$$

$$Z = p'_z$$

4.2.2. Robot cartésien

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{p}'_x \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{p}'_y \\ \mathbf{Z} &= \mathbf{p}'_z \end{aligned}$$



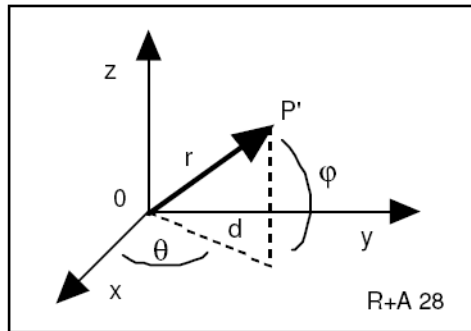
HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

96

4.2.3. Robot sphérique

$$\varphi = \text{Arctg}_4\left(\frac{p'_z}{d}\right)$$

$$\theta = \text{Arctg}_4\left(\frac{p'_y}{p'_x}\right)$$



La variable radiale n'est, elle, que légèrement différente du cas cylindrique. Ici, elle ne se trouve pas dans le plan, mais dans l'espace:

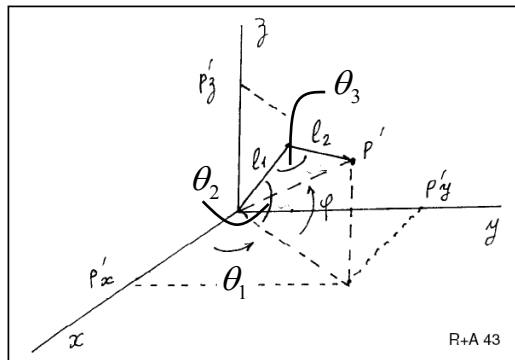
$$r = \sqrt{p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2}$$

C'est pour l'angle φ que la situation est vraiment nouvelle. Pour ce cas, calculons d'abord la longueur de la projection de r dans le plan horizontal, d :

$$d = \sqrt{p_x'^2 + p_y'^2}$$

4.2.4. Robot articulé 1 de 2

$$\theta_1 = \text{Arctg}_4\left(\frac{p'_y}{p'_x}\right)$$



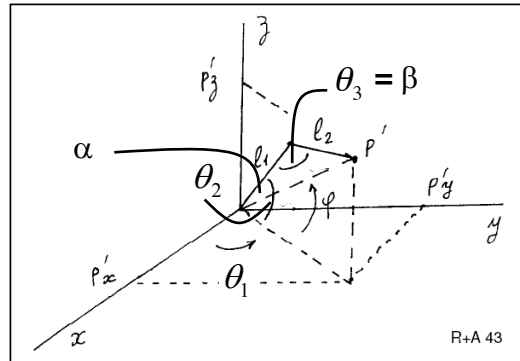
Utilisons un rayon virtuel, r , allant de 0 à P' , qui définit à son tour un angle φ , comme dans le cas du robot sphérique:

$$r = \sqrt{p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2}$$

$$\varphi = \text{Arctg}_4\left(\frac{p'_z}{d}\right) \text{ avec } d = \sqrt{p_x'^2 + p_y'^2}$$

**4.2.4. Robot articulé
1 de 2**

$$\theta_1 = \text{Arctg}_4\left(\frac{p'_y}{p'_x}\right)$$



Utilisons un rayon virtuel, r , allant de 0 à P' , qui définit à son tour un angle φ , comme dans le cas du robot sphérique:

$$r = \sqrt{p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2}$$

$$\theta_2 = \varphi + \alpha$$

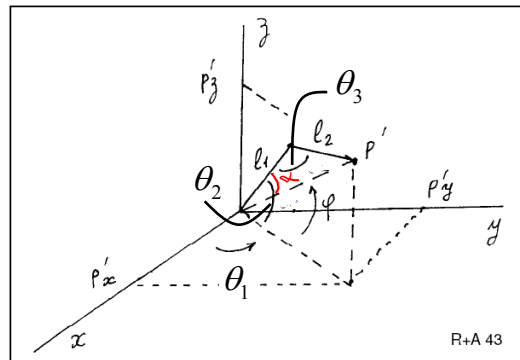
$$\varphi = \text{Arctg}_4\left(\frac{p_z'}{d}\right) \text{ avec } d = \sqrt{p_x'^2 + p_y'^2}$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

99

**4.2.4. Robot articulé
2 de 2**

$$r^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \theta_3$$



Nous obtenons maintenant un triangle, défini par les côtés l_1 , l_2 , et r . L'angle θ_3 est totalement déterminé par ce triangle, et sa valeur s'obtient par le théorème du cosinus (voir §Remarques):

$$\theta_3 = \arccos\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - r^2}{2l_1 l_2}\right)$$

Dès lors, on peut évaluer θ_1 , toujours en considérant le triangle l_1 , l_2 , et r :

$$\theta_2 = \alpha + \varphi \quad \text{où} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{l_1^2 + r^2 - l_2^2}{2l_1 r}\right)$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

100

4. Problème cinématique inverse

4.1. Introduction

Solution analytique

Solution géométrique (approche intuitive)

4.2. Solution cinématique inverse pour les trois premiers d.d.l.; positionnement du poignet

Robot cylindrique

Robot cartésien

Robot sphérique

Robot articulé

Remarques

4.3. Solution inverse pour les derniers d.d.l. ; orientation du préhenseur

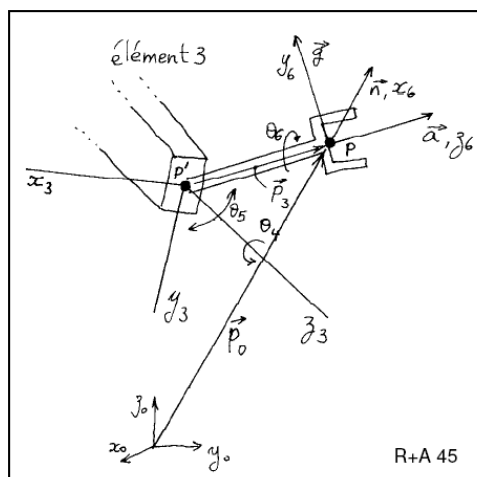
4.4. Solution inverse pour les angles d'Euler

4.5. Exemple: Solution inverse pour PUMA 560

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

101

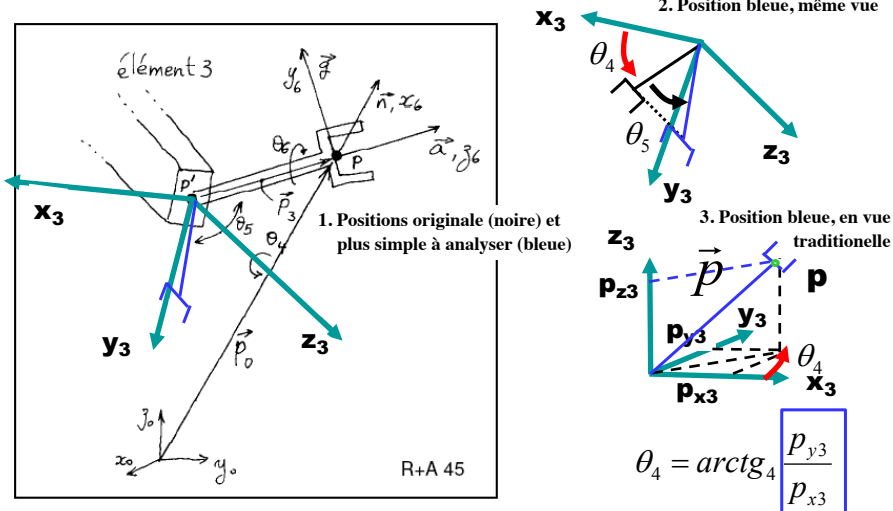
4.3. Solution inverse pour les derniers d.d.l. ; orientation du préhenseur



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

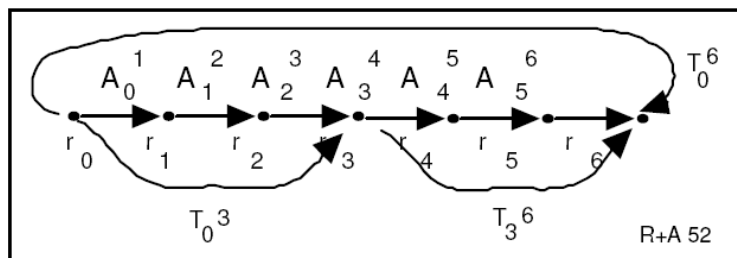
102

4.3. Solution inverse pour les derniers d.d.l. ; orientation du préhenseur



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

103



$$T_0^3 = A_0^1 * A_1^2 * A_2^3$$

$$T_3^6 = (T_0^3)^{-1} * T_0^6$$

$$p_3 = (T_0^3)^{-1} * p_0$$

$$T_3^6 = \begin{pmatrix} n_x & g_x & a_x & p_{x3} \\ n_y & g_y & a_y & p_{y3} \\ n_z & g_z & a_z & p_{z3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

104

$$\theta_4 = \text{Arc tg}_4 (p_{y3} / p_{x3})$$

$$\theta_5 = \text{Arc tg}_4 (p_{z3} / d) \quad \text{avec} \quad d = \sqrt{p_{x3}^2 + p_{y3}^2}$$

En opérant de même pour le dernier axe, c'est-à-dire en se déplaçant sur le dernier repère connu, qui est ici r_5 , on trouve par exemple:

$$\theta_6 = \text{Arc tg}_4 (p_{y5} / p_{x5})$$

4. Problème cinématique inverse

4.1. Introduction

Solution analytique

Solution géométrique (approche intuitive)

4.2. Solution cinématique inverse pour les trois premiers d.d.l.; positionnement du poignet

Robot cylindrique

Robot cartésien

Robot sphérique

Robot articulé

Remarques

4.3. Solution inverse pour les derniers d.d.l. ; orientation du préhenseur

4.4. Solution inverse pour les angles d'Euler

4.5. Exemple: Solution inverse pour PUMA 560

4.4. Solution inverse pour les angles d'Euler

$$R = \begin{pmatrix} n_x & g_x & a_x & 0 \\ n_y & g_y & a_y & 0 \\ n_z & g_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varphi = \operatorname{arctg}_4 \frac{a_y}{a_x}$$

- Il existe au choix deux solutions, séparées de 180 degrés.
- Si les deux arguments de l'arctg sont nuls, on fixera arbitrairement θ à zéro, car il y a dégénérescence, et la rotation peut être assurée par ψ .
- L'angle θ ainsi trouvé intervient ensuite dans la solution pour les autres angles.

$$\theta = \operatorname{arctg}_4 \frac{a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi}{a_z} \quad \text{et} \quad \psi = \operatorname{arctg}_4 \frac{-n_x \sin \varphi + n_y \cos \varphi}{-g_x \sin \varphi + g_y \cos \varphi}$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

107

4. Problème cinématique inverse

4.1. Introduction

Solution analytique

Solution géométrique (approche intuitive)

4.2. Solution cinématique inverse pour les trois premiers d.d.l.; positionnement du poignet

Robot cylindrique

Robot cartésien

Robot sphérique

Robot articulé

Remarques

4.3. Solution inverse pour les derniers d.d.l. ; orientation du préhenseur

4.4. Solution inverse pour les angles d'Euler

4.5. Exemple: Solution inverse pour PUMA 560

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

108

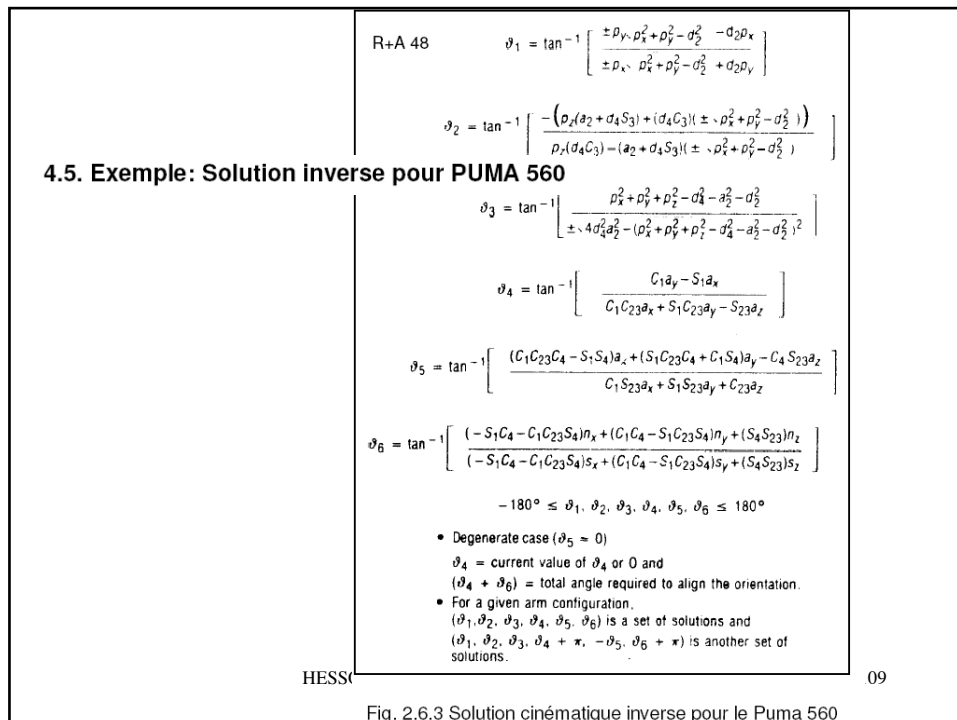
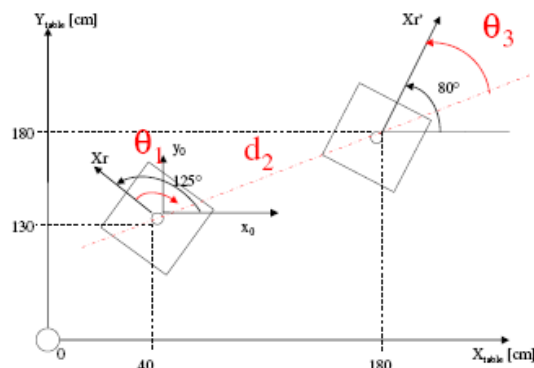


Fig. 2.6.3 Solution cinématique inverse pour le Puma 560

Cas des robots mobiles à 2 roues

- **Passage des coordonnées spatiales (notamment: de la matrice du bras) aux coordonnées intermédiaires (problème/solution cinématique inverse)**
- **Cas de la méthode d'Amiguet**

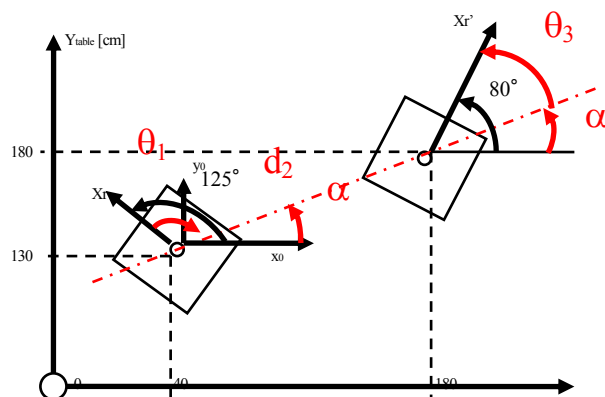


HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

110

Cas des robots mobiles à 2 roues

- **Prise en compte d'un angle auxiliaire, α ; dans l'exemple ci-dessous, les données angulaires sont les suivantes:**
 $\alpha_0=125$ degrés et $\alpha_1=80$ degrés



HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

111

Cas des robots mobiles à 2 roues

$$T_{table}^0 = \begin{pmatrix} n_x & g_x & a_x & p_{x0} \\ n_y & g_y & a_y & p_{y0} \\ n_z & g_z & a_z & p_{z0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ou} \{x_0, y_0, \alpha_0\} \quad T_0^1 = \begin{pmatrix} n_x & g_x & a_x & p_x \\ n_y & g_y & a_y & p_y \\ n_z & g_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{table}^1 = \begin{pmatrix} n_x & g_x & a_x & p_{x1} \\ n_y & g_y & a_y & p_{y1} \\ n_z & g_z & a_z & p_{z1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ou} \{x_1, y_1, \alpha_1\}$$

$$d_2 = \sqrt{(p_{x1} - p_{x0})^2 + (p_{y1} - p_{y0})^2} \text{ [cm]}$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{p_{y1} - p_{y0}}{p_{x1} - p_{x0}}\right) \quad \theta_1 = \alpha - \alpha_0 = \alpha - 125 = -105^\circ$$

$$\theta_3 = \alpha_1 - \alpha = 80 - \alpha = 60^\circ$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

112

Cas des robots mobiles à 2 roues

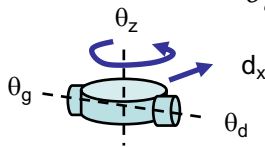
- **Passage des coordonnées intermédiaires aux coordonnées articulaires (cinématique inverse)**
- **La solution inverse pour le déplacement linéaire est simplement la suivante:**

$$d_x = d_2 \quad \theta_d, \theta_g = \frac{dx}{R} \quad \text{où } R \text{ est le rayon des roues}$$

- **La solution inverse pour les déplacements rotatifs est la suivante :**

$$\theta_z = \theta_1 \quad \text{puis} \quad \theta_z = \theta_3$$

$$\theta_d = \frac{E \cdot \theta_z}{2 \cdot R} \quad \text{où } E \text{ est la distance entre les roues}$$



$$\text{et enfin:} \quad \theta_g = -\theta_d$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

113

CINEMATIQUE D'UN BRAS MANIPULATEUR

1. Introduction
2. Rotation et translation de repères
3. Solution cinématique directe; Méthode de Denavit et Hartenberg
4. Problème cinématique inverse
5. Jacobien
6. Modèle dynamique

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

114

5. JACOBIEN

$$dx = \frac{\partial p_x}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial p_x}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial p_x}{\partial \theta_3} d\theta_3 + \dots + \frac{\partial p_x}{\partial \theta_6} d\theta_6$$

$$dy = \frac{\partial p_y}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial p_y}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial p_y}{\partial \theta_3} d\theta_3 + \dots + \frac{\partial p_y}{\partial \theta_6} d\theta_6$$

$$dz = \frac{\partial p_z}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial p_z}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial p_z}{\partial \theta_3} d\theta_3 + \dots + \frac{\partial p_z}{\partial \theta_6} d\theta_6$$

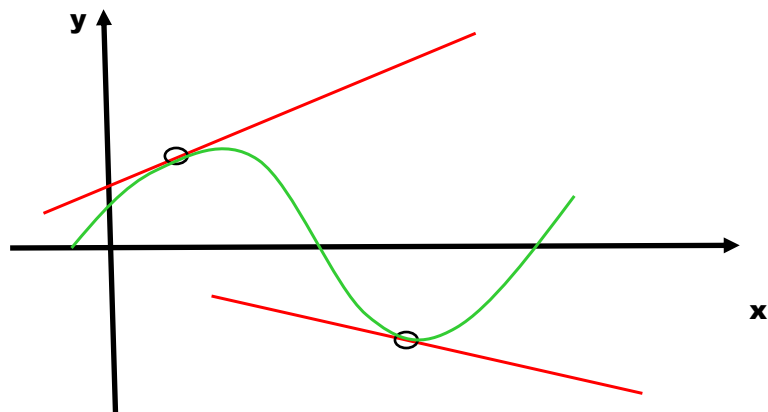
$$d\theta = \frac{\partial p_\theta}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial p_\theta}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial p_\theta}{\partial \theta_3} d\theta_3 + \dots + \frac{\partial p_\theta}{\partial \theta_6} d\theta_6$$

$$d\varphi = \frac{\partial p_\varphi}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial p_\varphi}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial p_\varphi}{\partial \theta_3} d\theta_3 + \dots + \frac{\partial p_\varphi}{\partial \theta_6} d\theta_6$$

$$d\psi = \frac{\partial p_\psi}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial p_\psi}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial p_\psi}{\partial \theta_3} d\theta_3 + \dots + \frac{\partial p_\psi}{\partial \theta_6} d\theta_6$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

115



$$y = \sin(x)$$

$$y = mx (+h)$$

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

116

CINEMATIQUE D'UN BRAS MANIPULATEUR

1. Introduction
2. Rotation et translation de repères
3. Solution cinématique directe; Méthode de Denavit et Hartenberg
4. Problème cinématique inverse
5. Jacobien
6. Modèle dynamique

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

117

6. MODÈLE DYNAMIQUE

$$[A(\theta)] a_{\theta} + [B(\theta)] v_{\theta}^2 + [C(\theta)] v_{\theta} v_{\theta} = Q(\theta) + \Gamma$$

Où 6×6 , 6×6 , et 6×15 sont les dimensions respectives des matrices

Problèmes

- complexité des équations
- temps de calcul
- erreurs dues aux influences externes au modèle, telles que forces de frottement, jeux, et forces liées à la charge manipulée.

HESSO.HEIG-VD, J.-D. Dessimoz, 22 nov. 2009

118